

7. Térbeli feladatok megoldása izoparametrikus elemekkel

Térbeli feladat: A test (alkatrész) alakjára (geometriájára) és terhelésére nézve nincs semmilyen korlátozó feltételezés.

7.1. Összefoglaló ismétlés

Elmozdulásmező: $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$.

Elmozdulás koordináták: $u = u(x, y, z)$,

$$v = v(x, y, z),$$

$$w = w(x, y, z).$$

Alakváltozási állapot / alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$.

Feszültségi állapot / feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$.

A rugalmasságtoni egyenletek:

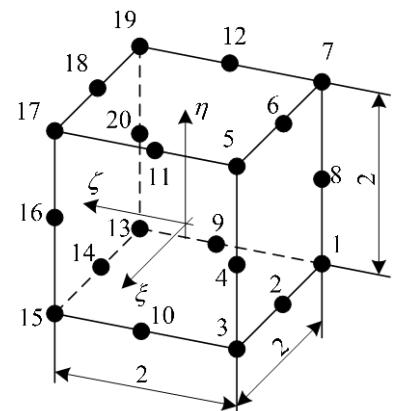
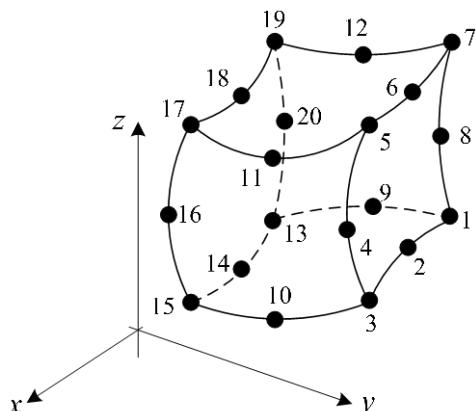
- a kinematikai egyenletek: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$,
- az egyensúlyi egyenletek: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$,
- a Hooke törvény: $\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I\nu}{1-2\nu}\right)$,
- a peremfeltételek:
 - kinematikai: $(A_u) \quad \vec{u} = \vec{u}_0$,
 - dinamikai: $(A_p) \quad \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$.

7.2. Hexaéder elem – leképezés, alakfüggvények

Leképezés:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

$N=20$ az elem csomópontjainak száma.



Alakfüggvények:

- a sarokpontokban ($i=1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19$),

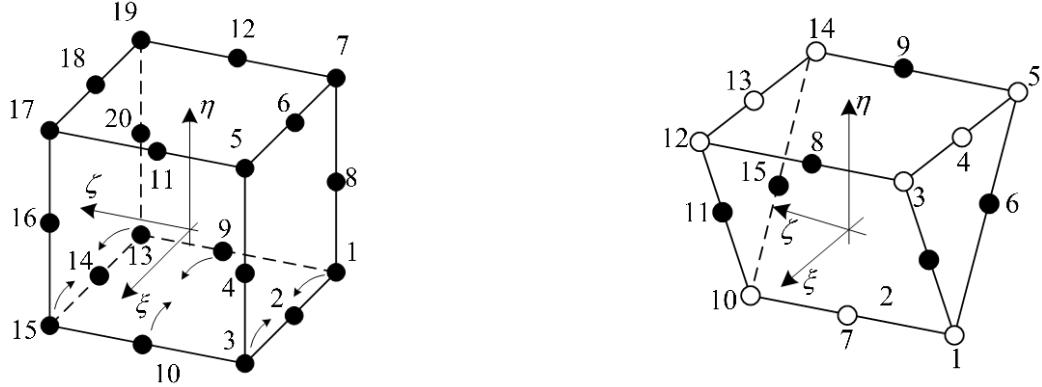
$$h_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2),$$

- a felezőpontokban ($i=2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20$),

$$h_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)\left[1 - (\xi\eta_i\zeta_i)^2 - (\xi_i\eta_i\zeta_i)^2 - (\xi_i\eta_i\zeta_i)\right].$$

Degeneráció: a hexaéder elemben egyes oldalak hosszúságát zérusra csökkentjük \Rightarrow csomópontok esnek egybe.

7.3. Pentaéder elem – leképezés, alakfüggvények



Alakfüggvények:

Az alakfüggvények a pentaéder elem ábrán körrel jelölt csomópontjaiban változnak meg.

$$\begin{aligned} h_1^* &= h_1 + h_2 + h_3, & h_7^* &= h_9 + h_{10}, & h_{10}^* &= h_{13} + h_4 + h_{15}, \\ h_2^* &= h_4, & h_8^* &= h_{11}, & h_{11}^* &= h_{16}, \\ h_3^* &= h_5 + \Delta h_{31}, & h_9^* &= h_{12}, & h_{12}^* &= h_{17} + \Delta h_{32}, \\ h_4^* &= h_6 - 2\Delta h_{31}, & & & h_{13}^* &= h_{18} - 2\Delta h_{32}, \\ h_5^* &= h_7 + \Delta h_{31}, & & & h_{14}^* &= h_{19} + \Delta h_{32}, \\ h_6^* &= h_8, & & & h_{15}^* &= h_{20}. \end{aligned}$$

h_i ($i = 1, 2, \dots, 20$) a hexaéder elem alakfüggvényei.

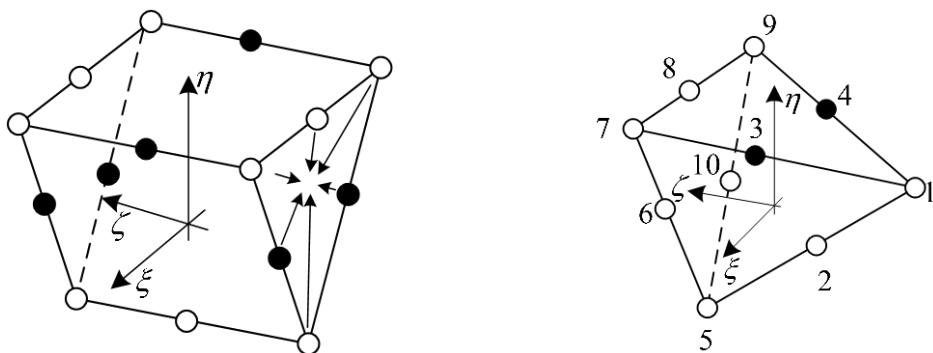
Korrektíós alakfüggvények: $\Delta h_{31} = \frac{1}{16}(1-\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2)$,

$$\Delta h_{32} = \frac{1}{16}(1+\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2).$$

További degeneráció: a $\zeta = -1$ oldalfelület zérusra csökkentése.

\Downarrow
az 1, 2, ..., 6 csomópontok egybeesnek.

7.4. Tetraéder elem – leképezések, alakfüggvények



Alakfüggvények:

Az alakfüggvények a tetraéder elem ábrán körrel jelölt csomópontjaiban változnak meg.

$$\begin{aligned}
h_1^* &= \sum_{i=1}^8 h_i, & h_6^* &= h_{16} - 2\Delta h_{12}, \\
h_2^* &= h_9 + h_{10}, & h_7^* &= h_{17} + \Delta h_{12} + \Delta h_{22} + 0,5(1+\zeta)\Delta h_{32}, \\
h_3^* &= h_{11}, & h_8^* &= h_{18} - 2\Delta h_{22} - (1+\zeta)\Delta h_{32}, \\
h_4^* &= h_{12}, & h_9^* &= h_{19} + \Delta h_{22} + \Delta h_{11} + 0,5(1+\zeta)\Delta h_{32}, \\
h_5^* &= h_{13} + h_{14} + h_{15} + \Delta h_{11} + \Delta h_{12}, & h_{10}^* &= h_{20} - 2\Delta h_{11}. \\
h_i &= (i=1, 2, \dots, 20) \text{ a hexaéder elem alakfüggvényei.}
\end{aligned}$$

Korrektív alakfüggvények:

$$\begin{aligned}
\Delta h_{11} &= \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), & \Delta h_{22} &= \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), \\
\Delta h_{12} &= \frac{1}{16}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2), & \Delta h_{32} &= \frac{1}{16}(1+\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2).
\end{aligned}$$

Degenerációs eljárás előnye: a hexaéder elemre vezetett összefüggések alkalmazhatók.

Különbség a három elem között:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hexaéder: } N = 20, \\ \text{- Más a csomópontok száma: Pentaéder: } N = 15, \\ \text{Tetraéder: } N = 10. \end{array} \right\}$$

- Mások az alakfüggvények: $h_i(\xi, \eta, \zeta) \Rightarrow h_i^*(\xi, \eta, \zeta)$.

7.5. Az elemek merevségi mátrixa

Elem geometriája lehet: hexaéder, pentaéder, tetraéder.

Az elem csomóponti elmozdulásvektora:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{\underline{q}}^e \\ \underline{\underline{q}}^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}^e \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{c} \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T \\ \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T \\ \vdots \\ \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T \end{array} \right], \quad \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T = [u_i \ v_i \ w_i].$$

Az elmozdulásmező közelítése:

$$\left. \begin{array}{l} u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{array} \right\} \quad N = \begin{cases} 20 \text{ hexaéder esetén,} \\ 15 \text{ pentaéder esetén,} \\ 10 \text{ tetraéder esetén.} \end{cases}$$

$$\text{Az elmozdulásmező közelítése mátrix alakban: } \underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e. \quad \begin{matrix} (\underline{\underline{u}}^e) & (3 \times 1) \\ (\underline{\underline{A}}^e) & (3 \times 3N) \\ (\underline{\underline{q}}^e) & (3N \times 1) \end{matrix}$$

$$\text{Az elmozdulásmező koordinátái: } \underline{\underline{u}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e.$$

$$\text{Az approximációs mátrix: } \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & | & h_2 & 0 & 0 & | & & | & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & | & 0 & h_2 & 0 & | & \cdots & | & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & | & 0 & 0 & h_2 & | & & | & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix}.$$

$$\text{Az alakváltozási vektor: } \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e \right)^T(\xi, \eta, \zeta) = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}]$$

Közelítése mátrix alakban:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_e & \underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{q}}^e.$$

(6x1) (6x3) (3x3N) (3Nx1) (6x3N) (3Nx1)

A deriválási utasítások részletesen kiírva:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}_e \underline{\underline{u}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^e.$$

Az alakváltozások és a csomóponti elmozdulások közötti kapcsolatot megadó mátrix:

$$\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & 0 & 0 & b_{3i} \\ b_{21} & b_{11} & 0 & b_{2i} & b_{1i} & 0 \\ 0 & b_{31} & b_{21} & 0 & b_{3i} & b_{2i} \\ b_{31} & 0 & b_{11} & b_{3i} & 0 & b_{2i} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$b_{1i} = \frac{\partial h_i}{\partial x} = R_{11} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{12} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{13} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta},$$

$$b_{2i} = \frac{\partial h_i}{\partial y} = R_{21} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{22} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{23} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta},$$

$$b_{3i} = \frac{\partial h_i}{\partial z} = R_{31} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + R_{32} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} + R_{33} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}.$$

A mátrix elemeinek kiszámítása:

R_{ij} - a leképezés inverz Jakobi mátrixának elemei.

Az inverz Jakobi mátrix:

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}.$$

A Jakobi mátrix kiszámítása:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}.$$

Az inverz Jacobi mátrix:

$$J_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj } J_{ij}}{\det \underline{\underline{J}}} , \quad \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}(\xi, \eta, \zeta).$$

A feszültségi vektor és közelítése:

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi, \eta, \zeta).$$

Az anyagállandók mátrixa: $\underline{\underline{C}}^e(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_2 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_6 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_7 & & \\ 0 & 0 & 0 & & c_8 & \\ 0 & 0 & 0 & & & c_9 \end{bmatrix}.$

Izotróp anyag esetén (*Hooke* törvény) az anyagállandók mátrixának elemei:

$$c_1 = c_2 = c_3 = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_4 = c_5 = c_6 = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_7 = c_8 = c_9 = G = E \frac{1}{2(1+\nu)}.$$

Ortotróp anyag esetén, ha x, y, z anyagi főirány:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta}, & c_2 &= \frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x E_z \Delta}, & c_3 &= \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta}, \\ c_4 &= \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}}{E_y E_z \Delta}, & c_5 &= \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta}, & c_6 &= \frac{\nu_{zy} + \nu_{xy}\nu_{zx}}{E_x E_z \Delta}, \\ \Delta &= (1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - 2\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}) / (E_x E_y E_z), \\ c_7 &= G_{yz}, & c_8 &= G_{xz}, & c_9 &= G_{xy}. \end{aligned}$$

Az elem merevségi mátrixa az x, y, z koordináta-rendszerben: $\underline{\underline{K}}^e = \int_{V^e} \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) dV,$

A merevségi mátrix mérete: $\begin{cases} (60 \times 60) & \text{hexaéder esetén,} \\ (45 \times 45) & \text{pentaéder esetén,} \\ (30 \times 30) & \text{tertaéder esetén.} \end{cases}$

Az integrálás elvégzéséhez áttérés a ξ, η, ζ változatokra:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \left[\underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi, \eta, \zeta) \det |J| d\xi d\eta d\zeta = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\underline{k}}^e(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Az integrandusz blokkokra bontása:

$$\underline{\underline{k}}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{a mátrix tetszőleges blokkja: } \begin{matrix} \underline{\underline{k}}^e \\ \underline{\underline{k}}_{ij} \\ (3 \times 3) \end{matrix}.$$

Az elem merevségi mátrixa szimmetrikus: $\underline{\underline{k}}_{ij}^e = (\underline{\underline{k}}_{ij}^e)^T.$

Az egyes blokkok általában nem szimmetrikusak: $(\underline{\underline{k}}_{ij}^e)_{pq} \neq (\underline{\underline{k}}_{ij}^e)_{qp}$ (kivétel $i=j$).

Az integrandusz tetszőleges blokkjának kiszámítása izotróp anyag esetén:

Jelölés: $c_1 = c_2 = c_3 = d_1, \quad c_4 = c_5 = c_6 = d_2, \quad c_7 = c_8 = c_9 = d_3.$

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{11} &= \left(b_{1i}d_1b_{1j} + b_{2i}d_2b_{2j} + b_{3i}d_3b_{3j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, & \left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{31} &= \left(b_{3i}d_2b_{1j} + b_{1i}d_3b_{3j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, \\
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{12} &= \left(b_{1i}d_2b_{2j} + b_{2i}d_3b_{1j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, & \left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{32} &= \left(b_{3i}d_2b_{2j} + b_{2i}d_3b_{3j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, \\
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{13} &= \left(b_{1i}d_2b_{3j} + b_{3i}d_3b_{1j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, & \left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{33} &= \left(b_{3i}d_1b_{3j} + b_{2i}d_3b_{2j} + b_{1i}d_3b_{1j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, \\
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{21} &= \left(b_{2i}d_2b_{1j} + b_{1i}d_3b_{2j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, \\
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{22} &= \left(b_{2i}d_2b_{2j} + b_{1i}d_3b_{1j} + b_{3i}d_3b_{3j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|, \\
\left(\underline{\underline{k}}_{ij}^e\right)_{23} &= \left(b_{2i}d_2b_{3j} + b_{3i}d_3b_{2j}\right)\det|\underline{\underline{J}}|,
\end{aligned}$$

A merevségi mátrix numerikus kiszámítása:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{k}}^e d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j w_k \underline{\underline{k}}^e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).$$

M a Gauss-féle integrációs pontok száma,

ξ_i, η_j, ζ_k a Gauss pontok helykoordinátái,

$w_i w_j w_k$ a Gauss-féle integrációs súlytényezők.

Pontosság: az M talppontú Gauss-féle kvadratúra az $(2M-1)$ -edfokú polinom integranduszig bezárólag pontos értéket szolgáltat.

7.6. Az elemek térfogati erőkből származó csomóponti terhelésvektora az x, y, z koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{f}}_q^e &= \int_{V^e} \left[\underline{\underline{A}}^e(x, y, z) \right]^T \underline{\underline{q}}(x, y, z) dV. \\
&\quad (3N \times 3) \quad (3 \times 1)
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{q}}(x, y, z)$ - a térfogati terhelés sűrűsége – ismert terhelés, V^e az elem térfogata.

$$\text{Pl.: a } z \text{ tengely körüli forgásból származó terhelés esetén: } \underline{\underline{q}}(x, y, z) = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol ρ - a tömegsűrűség, ω - szögsebesség.

Attérés a ξ, η, ζ változókra:

$$\underline{\underline{f}}_q^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \left[\underline{\underline{A}}^e(\xi, \eta, \zeta) \right]^T \underline{\underline{q}}(\xi, \eta, \zeta) \det|\underline{\underline{J}}| d\xi d\eta d\zeta = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\underline{\varphi}}_q^e(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

$$\text{Az integrandusz blokkokra bontása: } \left(\underline{\underline{\varphi}}_q^e \right)^T = \left[\left(\underline{\underline{\varphi}}_{q1} \right)^T \left(\underline{\underline{\varphi}}_{q2} \right)^T \dots \left(\underline{\underline{\varphi}}_{qi} \right)^T \dots \right]^T.$$

$$\text{Az intergrandusz } i \text{ jelű blokkja: } \underline{\underline{\varphi}}_{qi} = \rho \omega^2 \det|\underline{\underline{J}}| h_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A terhelésvektor numerikus kiszámítása:

$$\underline{\underline{f}}_q^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=-1}^1 \underline{\underline{\varphi}}_q^e d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j w_k \underline{\underline{\varphi}}_q^e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k).$$

7.7. Az elemek felületi erőkből származó csomóponti terhelésvektora az x,y,z koordináta-rendszerben

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{(A_p^e)} \left[\hat{\underline{\underline{A}}}^e \right]^T p(x, y, z) dA,$$

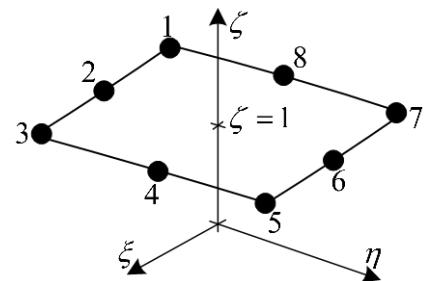
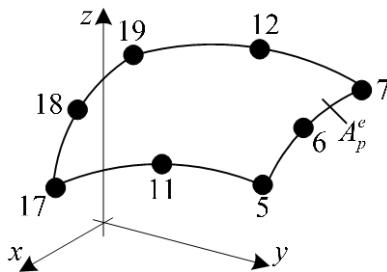
ahol A_p^e - az elem terhelt oldalfelülete, $\underline{\underline{p}}(x, y, z)$ - a felületi terhelés sűrűségvektora

$\hat{\underline{\underline{A}}}^e$ - a terhelt oldalfelületre lokalizált approximációs mátrix,

Feltételezés: a felületi terhelés az elem $\zeta = 1$ felületén működik.

Az elemhez kötött lokális csomóponti sorszámozás

A felülethez kötött lokális csomóponti sorszámozás



Az elem $\zeta = 1$ felületének paraméteres egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) x_i, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) y_i, \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) z_i. \end{aligned} \right\}$$

A $\zeta = 1$ felületre lokalizált alakfüggvények / approximációs függvények:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(\xi, \eta) &= h_{19}(\zeta = 1), & \hat{h}_5(\xi, \eta) &= h_5(\zeta = 1), \\ \hat{h}_2(\xi, \eta) &= h_{18}(\zeta = 1), & \hat{h}_6(\xi, \eta) &= h_6(\zeta = 1), \\ \hat{h}_3(\xi, \eta) &= h_{17}(\zeta = 1), & \hat{h}_7(\xi, \eta) &= h_7(\zeta = 1), \\ \hat{h}_4(\xi, \eta) &= h_{16}(\zeta = 1), & \hat{h}_8(\xi, \eta) &= h_{12}(\zeta = 1). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) u_i, \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) v_i, \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) w_i. \end{aligned} \right\}$$

Az elmozdulásmező közelítése a $\zeta = 1$ felületén:

Feltételezés: a felületi terhelés ismert nyomás $\underline{\underline{p}}(x, y, z) = -p(x, y, z) \vec{n}$.

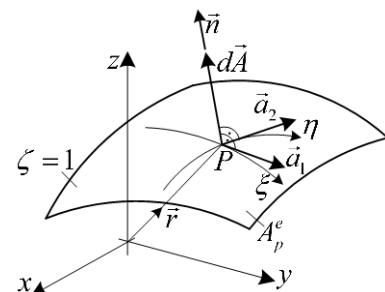
$p(x, y, z)$ - nyomás eloszlás, $\vec{n}(x, y, z)$ - a testből kifelé mutató normális egységvektor.

A felületi normális előállítása:

ξ, η - a $\zeta = 1$ felületen vett görbe vonalú koordináták,
 ξ, η - matematikai szempontból paraméterek.

A $\zeta = 1$ felület tetszőleges P pontjának helyvektora:

$$\vec{r} = x(\xi, \eta) \vec{e}_x + y(\xi, \eta) \vec{e}_y + z(\xi, \eta) \vec{e}_z.$$



A felület tetszőleges P pontjában a ξ, η koordinátavonalak érintővektorai:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \quad |\vec{a}_1| \neq 1, \quad |\vec{a}_2| \neq 1, \text{ mert } \xi, \eta \text{ nem ívhossz}$$

Az érintővektorok kiszámítása:

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \xi} z_i \vec{e}_z, \quad \vec{a}_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} x_i \vec{e}_x + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} y_i \vec{e}_y + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \eta} z_i \vec{e}_z.$$

$$\text{Jelölés: } \vec{a}_1 = a_{1x} \vec{e}_x + a_{1y} \vec{e}_y + a_{1z} \vec{e}_z, \quad \vec{a}_2 = a_{2x} \vec{e}_x + a_{2y} \vec{e}_y + a_{2z} \vec{e}_z.$$

A vektoriális felületelem:

$$d\vec{A} = [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta = [(a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y}) \vec{e}_x + (a_{1z}a_{2x} - a_{1x}a_{2z}) \vec{e}_y + (a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x}) \vec{e}_z] \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta.$$

$$\text{A skaláris felületelem: } dA = |d\vec{A}|$$

$$\text{A felület normális egységektora: } \vec{n} = \frac{d\vec{A}}{dA} \Rightarrow \vec{n} dA = d\vec{A}.$$

A felületi nyomásból származó csomóponti terhelésvektor:

$$\underline{\underline{f}}_p^e = - \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 [\hat{A}(\xi, \eta)]^T p(\xi, \eta) (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta = - \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \underline{\underline{\varphi}}_p^e(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

A felületre lokalizált approximációs mátrix

$$\hat{A}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \hat{h}_8 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{h}_8 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_1 & 0 & 0 & \hat{h}_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \hat{h}_8 \end{bmatrix}^e, \text{ mérete: } (24 \times 3).$$

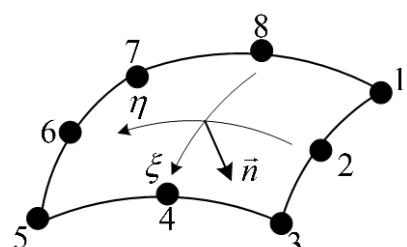
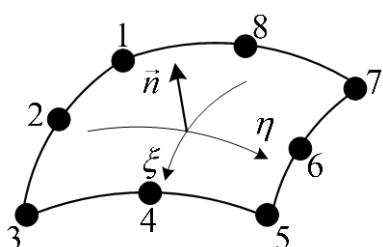
$$\text{Az integrandusz blokkolása: } \left(\underline{\underline{\varphi}}_p^e \right)^T = \left[\left(\underline{\underline{\varphi}}_{p1} \right)^T \left(\underline{\underline{\varphi}}_{p2} \right)^T \dots \left(\underline{\underline{\varphi}}_{p8} \right)^T \right]^e.$$

$$\text{Az } i \text{ jelű blokk: } \underline{\underline{\varphi}}_{pi}^e = p(\xi, \eta) \hat{h}_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y} \\ a_{1z}a_{2x} - a_{1x}a_{2z} \\ a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x} \end{bmatrix} \det \underline{\underline{J}}.$$

$$\text{A terhelésvektor numerikus kiszámítása: } f_p^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \underline{\underline{\varphi}}_p^e(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M w_i w_j \underline{\underline{\varphi}}_p^e(\xi_i, \eta_j).$$

Megjegyzések:

- A felületi terhelésből származó csomóponti terhelésvektor mérete csak (24x1), vagy (18x1), attól függően, hogy négyszög, vagy háromszög oldalról van szó.
Ezeket a zérustól különböző koordinátákat kell az elem (3Nx1)-es csomóponti terhelésvektorának megfelelő helyeire berakni.
- A felületi normális irányát mindenkor kötött lokális csomóponti sorszámozás határozza meg (jobbkéz szabály!).



7.8. Felületi rugalmas ágyazás figyelembevétele

Modellezés: rugalmas ágyazással lehet figyelembe venni más rugalmas testeknek a vizsgált testre gyakorolt hatását.

Rugalmas ágyazás: a testre nézve olyan felületi terhelést jelent, amelynek sűrűsége / nagysága arányos a felület pontjainak elmozdulásával.

Feltételezés:

- az ágyazó közeg lineárisan rugalmas
- a vizsgált test és az ágyazó közeg között kétoldalú kapcsolat van (nem lehetséges elválás)
- az ágyazásnál fellépő erő (felületi terhelés) és elmozdulás között homogén, lineáris függvénykapcsolat van.

$$\underline{\underline{p}}_r^e(x, y, z) = \underline{\underline{C}}_r \underline{\underline{u}}_r^e(x, y, z). \quad (3 \times 1) \quad (3 \times 3) \quad (3 \times 1)$$

A rugóállandók mátrixa: $\underline{\underline{C}}_r = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$.

c_x, c_y, c_z - a felület P pontjához kapcsolódó x, y és z irányú rugók rugóállandói.

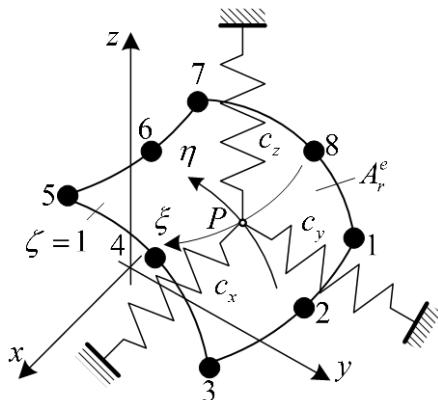
$$\text{A } \pi^e \text{ potenciális energia a rugalmas ágyazásnál fellépő erők munkájával bővül: } -\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}_r^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA.$$

A_r^e - az elem rugalmasan ágyazott felülete.

$$\text{Approximáció után: } -\frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}_r^e)^T \underline{\underline{p}}_r^e dA = \frac{1}{2} \int_{(A_r^e)} (\underline{\underline{u}}_r^e)^T \underline{\underline{C}}_r \underline{\underline{u}}_r^e dA = \frac{1}{2} (\underline{\underline{q}}^e)^T \int_{(A_r^e)} (\hat{\underline{\underline{A}}}^e)^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e dA \underline{\underline{q}}^e.$$

$$\text{Az elem rugalmas ágyazásból származó merevségi mátrixa: } \underline{\underline{K}}_r^e = \int_{(A_r^e)} \left[\hat{\underline{\underline{A}}}^e(x, y, z) \right]^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e(x, y, z) dA.$$

Feltételezés: a rugalmas ágyazás az elem $\zeta = 1$ oldalfelületén működik.



A felület egyenlete és az elmozdulásmező közelítése ugyanaz, mint a felületi terhelés redukciójánál:

Az elmozdulásmező közelítése a $\zeta = 1$ felületén:

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) u_i, \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) v_i, \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{h}_i(\xi, \eta) w_i. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Áttérés a } \xi, \eta \text{ változókra: } \underline{\underline{K}}_r^e = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \left[\hat{\underline{\underline{A}}}^e(\xi, \eta) \right]^T \underline{\underline{C}}_r \hat{\underline{\underline{A}}}^e(\xi, \eta) dA.$$

$$\text{Az elemi felület: } dA = \sqrt{(a_{1y}a_{2z} - a_{1z}a_{2y})^2 + (a_{1z}a_{2x} - a_{2z}a_{1x})^2 + (a_{1x}a_{2y} - a_{2x}a_{1y})^2} \det |J| d\xi d\eta.$$

$$\text{Jelölés: } \underline{\underline{K}}_r^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \underline{\underline{k}}_r^e \sqrt{\dots} \det |J| d\xi d\eta, \text{ mérete: (24x24).}$$

Az integrandusz blokkolása: $k_r^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{k}}_{11} & \underline{\underline{k}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{k}}_{18} \\ \underline{\underline{k}}_{21} & \underline{\underline{k}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{k}}_{28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{k}}_{81} & \underline{\underline{k}}_{82} & \cdots & \underline{\underline{k}}_{88} \end{bmatrix}_r^e$.

Az integrandusz tetszőleges blokka: $\left(\underline{\underline{k}}_{ij}\right)_r^e = \begin{bmatrix} \hat{h}_i c_x \hat{h}_j & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_i c_y \hat{h}_j & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_i c_z \hat{h}_j \end{bmatrix}$.

7.9. Peremfeltételek figyelembevétele térbeli feladatoknál

a) *Egy csomópont megfogása*: gömbcsuklós megtámasztás.

A megfogott pontban koncentrált támasztóerő lép fel.

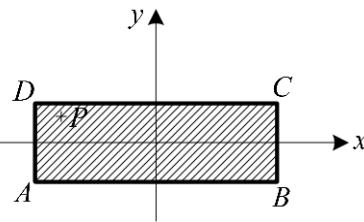
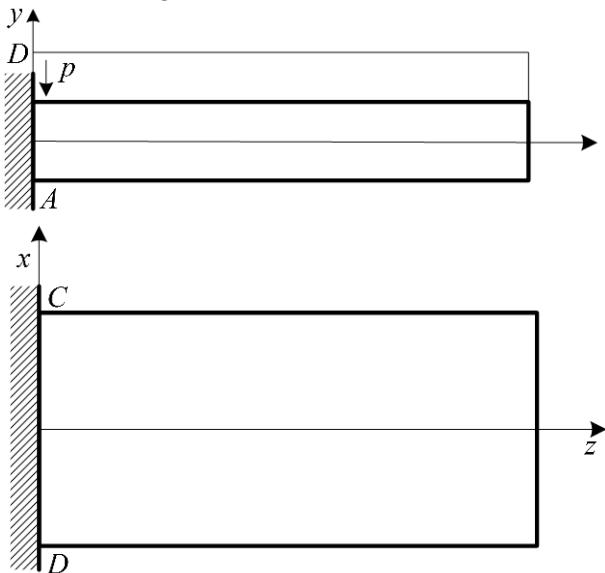
Térbeli feladatoknál a koncentrált terhelés feszültségkoncentrációt okoz, az erő támadáspontjának környezetében.

A koncentrált terhelés térbeli feladatoknál nem realisztikus.

Koncentrált erő, gömbcsukló – lehetőleg kerülni kell.

b) *A test egy felületének befogása / befalazása* (a felület minden csomópontjának megfogása):

Példa: befogott lemez számítása térbeli elemekkel.



A $ABCD$ felületet mereven megfogjuk.



$$u(x, y) \equiv 0, \quad v(x, y) \equiv 0, \quad w(x, y) \equiv 0.$$

A felületen / lapon lévő pontok nem mozdulhatnak el.

A merev felületen levő tetszőleges P pontban a mechanikai állapotok:

$$\begin{aligned} u \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ de} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0, \\ v \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ de} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \neq 0, \\ w \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ de} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0. \end{aligned}$$

A merev felületen levő tetszőleges P pontban az alakváltozási állapot:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0.\end{aligned}$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_p \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

A merev felületen levő tetszőleges P pontban a feszültségi állapot:

$$\underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{I}} \right), \quad A_I = \varepsilon_z.$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \\ \sigma_y &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \\ \sigma_z &= 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}. \end{aligned}$$

A merev felületen levő tetszőleges P pontban a feszültségi tenzor:

$$\left[\underline{\underline{F}}_p \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Legyen a P pont az AB egyenesen!

Dinamikai peremfeltétel az alsó felületen:

$$\vec{\rho}_y = \vec{0}, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= 0, \\ \tau_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{Ez ellentmondásban van a kinematikai előírásokból kapott eredményekkel.}$$

A felület befalazásának kinematikai előírásai a felület szélén ellentmondásra vezetnek és a feszültségi koordináák közötti kapcsolat sem könnyen értelmezhetők.

Térbeli feladatoknál ezért a felület befalazását lehetőleg kerülni kell.

Reálisabb modellezés: a kinematikai peremfeltételek helyett rugalmas ágyazás alkalmazása.